Ressources non-renouvelables, impatience et effort optimal de recherche-développement

Jean-Pierre Amigues*, André Grimaud†
and
Michel Moreaux‡

Mars 2001

*IDEI et LEERNA, INRA-Université de Toulouse I, 21 allée de Brienne, 31000 Toulouse, France.

†GREMAQ, IDEI et LEERNA, Université de Toulouse I, 21 allée de Brienne, 31000 Toulouse, France.

‡IDEI et LEERNA, Institut Universitaire de France-Université de Toulouse I, 21 allée de Brienne, 31000 Toulouse, France.

Résumé

On montre comment la contrainte d'épuisement des ressources non renouvelables sur laquelle risque de buter in fine le maintien d'un niveau de consommation minimal, peut être levée grâce à un effort d'investissement adapté. Mais cet effort, initialement assez intense dans certains cas, ne doit être consenti que si la productivité dans le secteur de la recherche est suffisamment élevée au regard de l'impatience. On montre aussi que le devenir des sociétés dont la base technique n'est pas susceptible de progresser, ne se confond pas avec celui des sociétés dont la base technique est potentiellement évolutive, mais dans lesquelles une préférence marquée pour le présent a pour effet de leur faire choisir une trajectoire de recherche initialement trop timide, de sorte qu'à terme, leur consommation est inéluctablement amenée à régresser.

Abstract

We show how the exhaustion constraint of non renewable resources, against which maintaining a minimum level of consumption may collapse in the long run, could be relaxed by an appropriate effort in R&D. However along any optimal trajectory of the economy, this effort has to be made if and only if the productivity in the research sector is high enough compared with the impatience. We also show that the evolution of societies without technical progress is not the same that the evolution of societies with technical progress but strong impatience. Indeed, in this last case, the society must choose an increasing R&D effort but initially low, resulting in a long run decrease of the consumption level.

Table des matières

1 Introduction

On se propose dans ce mémoire de montrer comment la contrainte d'épuisement des ressources non renouvelables sur laquelle risquerait de buter à terme le désir de maintien d'un certain niveau de vie, peut être contournée grâce à un effort de recherche-développement spécifique, et pourquoi la société devra consentir cet effort le long de toute trajectoire optimale d'évolution de l'économie si sa préférence pour le présent, son impatience, n'est pas trop forte.

Par effort de recherche spécifique on entend la mobilisation de moyens en vue d'améliorer la productivité d'un facteur de production sans nécessairement accroître la productivité des autres facteurs. Par exemple le progrès des connaissances en matière d'isolement thermique permet de réduire la quantité d'énergie indispensable au déclenchement de telle ou telle réaction sans nécessairement modifier les quantités requises des autres facteurs. Ce type de progrès doit être vu comme l'un des types polaires du progrès technique. L'autre grand type polaire est celui du progrès qui accroît indistinctement la productivité de l'ensemble des facteurs. La différence entre ces deux types est la plus contrastée pour la classe des fonctions de production à facteurs strictement complémentaires de la forme générale, dans le cas d'une monoproduction, $y = \alpha(y) \min_{i=1,\ldots,n} \{a_i(y)x_i\}$, où les coefficients α et $a_i, i = 1, \ldots, n$, sont eux-mêmes des fonctions positives croissantes de y. Un progrès technique spécifique au facteur i est celui qui permet d'accroître les valeurs prises par la fonction a_i tandis qu'un progrès technique général est celui qui permet d'accroître les valeurs prises par la fonction α. On supposera dans la présente étude que les facteurs de production sont strictement complémentaires et que la proportion dans laquelle il faut les utiliser à un instant donné, ne dépend pas de l'échelle de la production ; en d'autres termes on supposera qu'à chaque instant la technologie est une technologie à la Leontiev [1] [2].

Il ne suffit pas qu'il existe des opportunités de progrès pour que la société doive s'en saisir. Dans la mesure où concrétiser ces potentialités exige un effort, encore faut-il qu'il vaille que la société consente à le fournir. On montre que selon les valeurs prises par le rapport du taux d'actualisation social à la productivité du travail dans le secteur de la recherche,la trajectoire d'évolution optimale de l'économie sera ou ne sera pas une trajectoire le long

[1] Pour une présentation très claire de la problématique de la substitution entre facteurs dans les modèles agrégés avec ressources épuisables et des effets d'un progrès technique non spécifique dans ce genre de modèle on pourra consulter Kany et Ragot (1998). On trouvera dans l'ouvrage de Schubert et Zagamé (1998) dont cet article constitue l'un des chapitres, une bibliographie abondante que nous n'avons pas jugé utile de dupliquer dans le présent mémoire.

[2] On trouvera dans Ruttan (2001) un panorama des évolutions technologiques depuis environ un siècle et demi et des politiques en matière de recherche-développement.

de laquelle l'effort de recherche est suffisamment intense initialement pour que la contrainte d'épuisement des réserves soit levée.

L'étude est conduite comme suit. Le modèle est exposé à la section 2. On examine à la section 3 quel serait l'usage optimal du stock de ressource si aucune amélioration de la technique n'était envisageable. On établit à la section 4 les propriétés générales des trajectoires optimales. On détermine à la section 5 les caractéristiques des régimes réguliers et plus particulièrement celles des régimes réguliers optimaux. L'étude de la transition vers le régime régulier optimal, lorsque celui-ci existe, est entreprise à la section 6 et l'étude de la trajectoire optimale en l'absence de régime régulier optimal fait l'objet de la section 7. On conclut brièvement à la section 8.

2 Le modèle

On considère une économie de population constante, où l'offre de travail est inélastique. Comme on suppose que la production s'effectue à rendements constants (cf. (2.1) ci-dessous) on peut, sans perte de généralité, normaliser à 1 la quantité de travail disponible à chaque instant.

La production du bien de consommation nécessite du travail et une ressource non-renouvelable. Les facteurs de production sont supposés strictement complémentaires. Soit c_t la quantité de bien de consommation produite à l'instant t, l_t la partie du travail disponible affectée à sa production et s_t la quantité de ressource utilisée. Alors :

$$c_t = \min\{Al_t, B_t s_t\}, \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

où A est le coefficient technique de productivité du travail et B_t le coefficient technique de productivité de la ressource [3]. Le coefficient de productivité du travail est supposé non-améliorable. Le coefficient de productivité de la ressource, donné à court terme, peut être amélioré à long terme à condition de consentir un effort de recherche d'autant plus intense que l'amélioration envisagée est importante. Soit n_t la partie du travail disponible consacrée à l'amélioration de B_t. On pose qu'à chaque instant le taux de croissance de B_t est proportionnel à l'effort consenti :

$$\dot{B}_t = bn_t B_t \ , \quad t \geq 0 \tag{2.2}$$

où $b > 0$ est le coefficient technique de productivité de la recherche. B_t peut être vu comme un stock de connaissances permettant de tirer parti au

[3] Prendre explicitement en compte le capital, c'est-à-dire une fonction de production $y_t = \min\{A\ell_t, Dk_t, B_t s_t\}$, avec $\dot{k}_t = i_t - \delta k_t$, où i_t est l'investissement brut instantané et δ le taux d'attrition du capital, et $c_t = y_t - i_t$, ne modifierait pas fondamentalement les conclusions de la présente étude. La raison en est que le capital est un facteur reproductible. Simplement la consommation du régime régulier optimal asymptotique lorsqu'un tel régime existe est évidemment plus faible puisqu'on doit en permanence renouveler le capital qui arrive en fin d'exploitation.

mieux de la ressource pour produire le bien de consommation. Ce stock de connaissances s'accroît d'autant plus vite que les moyens consacrés à son développement sont importants. Par ailleurs le processus est cumulatif en ce sens qu'à effort de recherche donné, l'accroissement est d'autant plus important que le stock des connaissances est déjà élevé.

Le travail peut être affecté à l'un ou l'autre secteur, production ou recherche, le transfert des actifs d'un secteur à l'autre n'impliquant ni aucun délai, ni aucun coût. La contrainte de répartition du travail disponible prend donc la forme :

$$1 - l_t - n_t \geq 0 \;, \quad l_t \geq 0 \quad \text{et} \quad n_t \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

La société dispose initialement d'un stock donné de ressource S_0. Puisque la ressource est non-renouvelable, le stock non-utilisé à l'instant t, S_t, décroît au rythme de son utilisation :

$$\dot{S}_t = -s_t, \quad t \geq 0. \tag{2.4}$$

Pour aller à l'essentiel on suppose que le coût d'extraction et de traitement avant mise à disposition du secteur de production du bien de consommation, est nul.

L'utilité instantanée de la consommation est du type à "élasticité constante de l'utilité marginale" :

$$u(c) = c^{1-\epsilon}/(1-\epsilon) \;, \quad \epsilon > 0 \quad \text{et} \quad \epsilon \neq 1. \tag{2.5}$$

Soit ρ le taux d'escompte social que l'on suppose constant. L'objectif du planificateur social est de maximiser la somme des utilités instantanées actualisées qu'implique le sentier de consommation choisi.

Etant donné la structure du problème, il est clair que la contrainte d'utilisation du travail disponible doit être saturée : tout travail qui n'est pas utilisé dans le secteur de production du bien de consommation doit être affecté à l'amélioration de la productivité de la ressource pour maximiser les potentialités de consommation future. On doit donc avoir à chaque instant $n_t = 1 - l_t$. On peut ainsi éliminer l'une des variables l ou n et ne retenir qu'une seule variable de commande. Dans ce qui suit on retiendra n_t, sauf à la section 3. Par ailleurs, si $1 - n_t$ est la quantité de travail affectée à la production du bien final, la complémentarité et le non-gaspillage des facteurs de production impliquent que la quantité de ressource qu'il faut sacrifier à chaque instant s'élève à $A[1-n_t]/B_t$. On peut donc formuler le problème du choix d'une trajectoire optimale de l'économie comme un problème à une seule variable de commande, n_t, et deux variables d'état, B_t et S_t. Soit (P) ce problème :

$$(P) \quad \max_{n_t; t \geq 0} \quad \frac{1}{1-\epsilon} \int_0^{\infty} \{A[1-n_t]\}^{1-\epsilon} e^{-\rho t} dt \tag{2.6.1}$$

$$\dot{B}_t = b n_t B_t \ , \ B_0 \text{ donné} \tag{2.6.2}$$

$$\dot{S}_t = -A[1-n_t]/B_t \ , \ S_0 \text{ donné}, \ S_t \geq 0 \tag{2.6.3}$$

$$1 - n_t \geq 0, \ n_t \geq 0 \tag{2.6.4}$$

3 L'utilisation optimale de la ressource en l'absence de progrès technique

En l'absence de progrès technique, le problème (P) se ramène à un problème de choix d'un rythme optimal de consommation du stock de ressource initialement disponible, la vitesse d'épuisement du stock étant éventuellement bornée supérieurement dans un premier temps par la quantité de travail utilisable lorsque le stock initial est abondant.

Soit l_t la variable de commande du problème (Q) suivant :

$$(Q) \quad \max_{l_t; t \geq 0} \quad \frac{1}{1-\epsilon} \int_t^{\infty} [A l_t]^{1-\epsilon} e^{-\rho t} dt \tag{3.1}$$

$$\dot{S}_t = -A l_t / B \ , \ S_0 \text{ donné}, \ S_t \geq 0 \tag{3.2}$$

$$1 - l_t \geq 0, \ l_t \geq 0. \tag{3.3}$$

Il est clair que la contrainte $l_t \geq 0$ n'est jamais saturée. On peut donc la négliger. Soit LQ_t le lagrangien en valeur courante du problème (Q) :

$$LQ_t \quad = \quad [A l_t]^{1-\epsilon} (1-\epsilon)^{-1} - \lambda_t A l_t B^{-1} + \alpha_t [1 - l_t]. \tag{3.4}$$

La condition de maximisation de LQ_t par rapport à l_t a pour expression :

$$A^{1-\epsilon} l_t^{-\epsilon} - \lambda_t A B^{-1} - \alpha_t = 0. \tag{3.5}$$

Par ailleurs :

$$\dot{\lambda}_t = \rho \lambda_t \quad \Rightarrow \quad \lambda_t = \lambda_0 e^{\rho t}. \tag{3.6}$$

Examinons d'abord la phase de la trajectoire pendant laquelle la contrainte de disponibilité en travail n'est pas saturée. En posant $\alpha_t = 0$ dans (3.5) et en remplaçant λ_t par $\lambda_0 e^{\rho t}$ (cf. (3.6)), on obtient l'expression de l_t pendant une phase de ce type :

$$l_t \quad = \quad B^{1/\epsilon} e^{-\rho t/\epsilon} / A \lambda_0^{1/\epsilon}. \tag{3.7}$$

Puisqu'on doit avoir $l_t < 1$ pendant ce type de phase, elle ne peut commencer à l'instant $t = 0$ que si $\lambda_0 > B/A^{2}$.

Pour tout $\lambda_0 > B/A^{2}$, définissons $\bar{S}(\lambda_0)$ comme le stock de ressource qui serait nécessaire pour produire Al_t indéfiniment, l_t étant donné par (3.7). Puisque

$$s_t \quad = \quad Al_tB^{-1} = B^{\frac{1}{\epsilon}-1}e^{-½t=2}\lambda_0^{-1=2}, \tag{3.8}$$

la quantité de ressource utilisée jusqu'à l'instant t, $\bar{S}_t(\lambda_0)$, s'élève à :

$$\bar{S}_t(\lambda_0) \quad = \quad \int_0^t s_¿\,d\tau = (\epsilon/\rho)B^{\frac{1}{\epsilon}-1}[1 - e^{-½t=2}]\lambda_0^{-1=2}, \tag{3.9}$$

de sorte que :

$$\bar{S}(\lambda_0) \quad = \quad \lim_{t\uparrow\infty} \bar{S}_t(\lambda_0) = (\epsilon/\rho)B^{\frac{1}{\epsilon}-1}\lambda_0^{-1=2}. \tag{3.10}$$

Soit $\bar{\lambda}_0$ l'inverse de la fonction $\bar{S}$:

$$\bar{\lambda}_0(S) \quad = \quad \bar{S}^{-1}(S) = (\epsilon/\rho)^{2}B^{1-2}S^{-2}. \tag{3.11}$$

En reportant la valeur ainsi obtenue de λ_0 dans l'expression de s_t on obtient la vitesse optimale de consommation de la ressource en fonction du stock initial S_0 pourvu que celui-ci ne soit pas trop important :

$$s_t = (\rho/\epsilon)S_0e^{-½t=2} \quad \Rightarrow \quad c_t = (\rho/\epsilon)BS_0e^{-½t=2}. \tag{3.12}$$

Le sentier de consommation est donc de ce type sur $[0, \infty[$ si $\lambda_0 > B/A^{2}$, i.e. d'après (3.11) si :

$$S_0 \quad \leq \quad (\epsilon/\rho)AB^{-1}. \tag{3.13}$$

Pour un stock initial supérieur à cette valeur critique, le sentier optimal consiste à consommer d'abord le maximum compatible avec la contrainte $l_t \leq 1$, i.e. $c_t = A$, et $s_t = A/B$, jusqu'à ce que le stock soit ramené à la valeur critique $\epsilon A/\rho B$. Soit θ la date à laquelle cette valeur est atteinte :

$$\theta \quad = \quad \left(S_0 - \frac{\epsilon}{\rho}\frac{A}{B}\right)/\frac{A}{B} = \frac{BS_0}{A} - \frac{\epsilon}{\rho}. \tag{3.14}$$

Alors, l'expression de λ_0, en fonction de S_0, est donnée par :

$$\lambda_0 \quad = \quad A^{-2}Be^{-½\mu} \quad \text{avec} \quad \theta = A^{-1}BS_0 - (\epsilon/\rho). \tag{3.15}$$

Pour $t > \theta$, la consommation décroît selon la formule (3.12). A partir de l'instant θ le travail disponible n'est plus totalement employé. Le chômage est ici une conséquence immédiate des hypothèses d'inélasticité de l'offre de travail et de non-substitution des facteurs de production.

En l'absence de progrès technique l'épuisement de la ressource a pour conséquence une diminution constante de la consommation à partir d'une certaine date, consommation qui tend asymptotiquement vers zéro. Montrons maintenant qu'un progrès technique endogène conduit à soutenir indéfiniment un niveau de consommation strictement positif et constant à long terme si l'efficacité du travail dans l'activité de recherche est suffisamment élevée.

4 Caractérisation des trajectoires optimales

Soit LP_t le lagrangien en valeur courante du problème (P). Puisqu'il est clair que la contrainte $1 - n_t \geq 0$ ne doit jamais être saturée, on peut la négliger, d'où :

$$LP_t \quad = \quad (1-\epsilon)^{-1}[A(1-n_t)]^{1-\epsilon} - \lambda_t A B_t^{-1}(1-n_t) + \nu_t b n_t B_t + \beta_t n_t. \tag{4.1}$$

La condition de maximisation de LP_t par rapport à n_t prend la forme :

$$-A^{1-\epsilon}[1-n_t]^{-\epsilon} + \lambda_t A B_t^{-1} + \nu_t b B_t + \beta_t = 0 \tag{4.2}$$

et les conditions régissant l'évolution des variables duales λ_t et ν_t sont respectivement :

$$\dot{\lambda}_t = \rho \lambda_t \quad \Rightarrow \quad \lambda_t = \lambda_0 e^{\rho t} \tag{4.3}$$

et :

$$\dot{\nu}_t \quad = \quad [\rho - b n_t]\nu_t - \lambda_t A B_t^{-2}[1-n_t]. \tag{4.4}$$

Lorsque la trajectoire de l'économie n'est pas contrainte par la condition $n_t \geq 0$, la condition (4.2) s'écrit :

$$A^{1-\epsilon}[1-n_t]^{-\epsilon} \quad = \quad A c_t^{-\epsilon} = \lambda_t A B_t^{-1} + \nu_t b B_t. \tag{4.5}$$

Le membre gauche de cette relation est le coût marginal de n_t en termes d'utilité instantanée ; le premier terme du membre droit représente la valeur instantanée de l'économie de ressource qu'implique à la marge un accroissement de n_t, le prix imputé de la ressource étant égal à λ_t, et le second terme représente la valeur instantanée de l'accroissement du stock de connaissances qu'implique à la marge un effort de recherche accru, le prix imputé du stock de connaissances étant égal à ν_t. Le long de toute trajectoire optimale, le coût marginal instantané de n_t doit être égal en permanence à son bénéfice marginal.

Pour mettre en évidence les conditions d'arbitrage intertemporel en termes d'utilité et de possibilités de production, différencions la condition (4.5) par rapport à t :

$$-\epsilon A\dot{c}_t c_t^{-(1+\epsilon)} = \dot{\lambda}_t A B_t^{-1} - \lambda_t A B_t^{-2}\dot{B}_t + \dot{\nu}_t b B_t + \nu_t b \dot{B}_t. \tag{4.6}$$

Dans cette expression substituons à $\dot{\lambda}_t$ son expression donnée par (4.3), à $\dot{B}_t$ son expression donnée par (2.2) et à $\dot{\nu}_t$ son expression donnée par (4.4). Après simplification on obtient :

$$-\epsilon A\dot{c}_t c_t^{-(1+\epsilon)} = \rho\left[\lambda_t A B_t^{-1} + \nu_t b B_t\right] - \lambda_t b A B_t^{-1}, \tag{4.7}$$

qu'on peut réécrire en tenant compte de (4.5) :

$$-\epsilon A\dot{c}_t c_t^{-(1+\epsilon)} = \rho A c_t^{-\epsilon} - \lambda_t b A B_t^{-1}. \tag{4.8}$$

Remarquons alors que le long du sentier optimal la valeur du stock de ressource S_t évaluée au prix λ_t doit, à chaque instant, être égale à la valeur du stock de connaissances B_t évalué au prix ν_t [4] :

$$\lambda_t S_t \quad = \quad \nu_t B_t \quad , \quad t \geq 0 \tag{4.9}$$

de sorte que l'égalité (4.5) s'écrit encore :

$$A c_t^{-\epsilon} \quad = \quad \lambda_t A B_t^{-1} + b\lambda_t S_t,$$

d'où :

$$\lambda_t A B_t^{-1} \quad = \quad A c_t^{-\epsilon}(1 + bA^{-1}B_t S_t)^{-1}. \tag{4.10}$$

Dans (4.8) substituons à $\lambda_t A B_t^{-1}$ son expression donnée par (4.10). On obtient finalement :

$$\rho + \epsilon\dot{c}_t c_t^{-1} \quad = \quad b(1 + bA^{-1}B_t S_t)^{-1}, \tag{4.11}$$

où $\epsilon/c_t = -u''_t/u'_t$, u'_t et u''_t étant les dérivées première et seconde de u évaluées en c_t. On montre en appendice (annexe A.2) que cette condition n'est autre que la condition d'égalité du taux marginal instantané de substitution intertemporelle au taux marginal instantané de transformation intertemporelle, c'est-à-dire la condition classique d'arbitrage qui doit être vérifiée en permanence le long de toute trajectoire localement optimale.

[4] la démonstration est donnée en appendice (cf. annexe A.1)

5 Régimes réguliers

Convenons d'appeler trajectoire soutenable tout sentier d'évolution de la consommation techniquement réalisable dont la borne inférieure est strictement positive : $c_t \geq \underline{c} > 0,\ t \geq 0$. On dira qu'une trajectoire soutenable est un régime régulier si elle est techniquement réalisable grâce à un effort de recherche constant $n, n \in]0,1[$.

On montre dans cette section qu'il existe une infinité de régimes réguliers mais qu'un seul est éventuellement optimal.

5.1 L'ensemble des régimes réguliers

Considérons un effort de recherche constant n. Cet effort permet une croissance du coefficient de productivité de la ressource B_t, à un taux constant bn de sorte que :

$$B_t \quad = \quad B_0 e^{bnt}. \tag{5.1}$$

Pour tout $n > 0$ et tout l, $1 - n - l \geq 0$, la condition de non-gaspillage des facteurs de production implique que $Al = B_0 e^{bnt} s_t$, d'où :

$$s_t \quad = \quad AB_0^{-1} l e^{-bnt} \tag{5.2}$$

Dans un tel régime, la quantité de ressource utilisée sur l'intervalle $[0, t[$, que l'on note $\bar{S}_t(l)$, s'élève à :

$$\bar{S}_t(l) \quad = \quad \frac{Al}{B_0} \int_0^t e^{-bn\tau} d\tau = \frac{Al}{B_0} \frac{1}{bn} [1 - e^{-bnt}].$$

Le stock de ressource nécessaire pour suivre indéfiniment ce sentier, $\bar{S}(l)$, est donc égal à :

$$\bar{S}(l) \quad = \quad \lim_{t \uparrow \infty} \bar{S}_t(l) = Al / bnB_0. \tag{5.3}$$

Si de plus on utilise la totalité du travail disponible, alors $l = 1 - n$, et le stock de ressource dont il faut disposer s'élève à :

$$\tilde{S}_0(n) \quad = \quad A[1 - n] / bnB_0 \tag{5.4}$$

On en conclut que pout tout n, $n \in]0, 1[$, il existe une infinité de conditions initiales (B_0, S_0) à partir desquelles il est techniquement possible de suivre le sentier de consommation constante $c = A[1 - n]$, le progrès technique étant juste suffisant pour que le stock initialement disponible soit exactement utilisé. L'ensemble de ces couples doit vérifier la relation :

$$B_0 S_0 \quad = \quad A[1 - n] / bn. \tag{5.5}$$

Une conséquence immédiate de (5.5) est que si (B_0, S_0) vérifie la relation (5.5) et si l'économie suit le sentier à effort de recherche n correspondant, alors [5] :

$$B_t S_t \quad = \quad B_0 S_0, \quad t \geq 0. \tag{5.6}$$

Les relations (5.5) et (5.6) impliquent que, dans l'espace (B, S), la trajectoire d'un régime régulier correspond au parcours d'une partie d'une hyperbole équilatère, d'autant plus éloignée de l'origine que n est faible [6]. Ce parcours est illustré à la Figure 1 ci-dessous. Pour des valeur n', B'_0, et S'_0 données, le sentier régulier partant de (B'_0, S'_0) est représenté en trait gras sur l'hyperbole $BS = A[1-n']/bn'$.

[5] Formellement, le long d'un tel sentier on a $S_t = S_0 - \bar{S}_t(1-n)$, d'où :

$$S_t \quad = \quad S_0 - \frac{A[1-n]}{bnB_0}[1 - e^{-bnt}],$$

tandis que $B_t = B_0 e^{bnt}$, de sorte que :

$$B_t S_t \quad = \quad B_0 e^{bnt}\left[S_0 - \frac{A[1-n]}{bnB_0}[1 - e^{-bnt}]\right],$$

et, puisque d'après (5.5) $1 - n = bnB_0S_0/A$, la relation précédente s'écrit finalement :

$$B_t S_t \quad = \quad B_0 e^{bnt}[S_0 - S_0 + S_0 e^{-bnt}] = B_0 S_0.$$

[6]

$$\frac{d}{dn}\left[\frac{A[1-n]}{bn}\right] \quad = \quad -\frac{A}{bn} - \frac{A[1-n]}{bn^2} < 0.$$

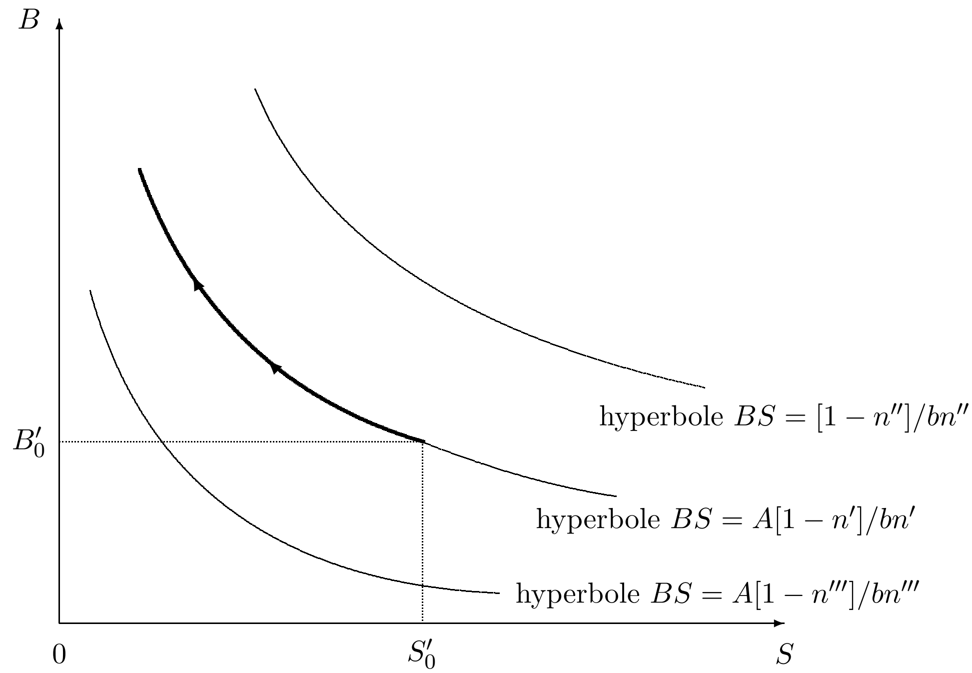

Figure 1 : Trajectoires de B_t et S_t en régime régulier
NB : $n'' < n' < n'''$

Etant donné la forme de la fonction de production du bien de consommation, l'hypothèse clé qui permet d'obtenir des régimes réguliers est celle qui garantit l'existence d'une croissance à taux constant du stock de connaissances B_t, compensant l'épuisement du stock de ressources. Toute fonction f telle que $\exists n \in]0,1[, f(n) > 0$ et $\dot{B}_t/B_t = f(n)$, garantit l'existence d'un régime régulier. On aurait :

$$B_t \quad = \quad B_0 e^{f(n)t},$$

et la condition initiale :

$$B_0 S_0 \quad = \quad A[1-n]/f(n),$$

devrait être vérifiée. Enfin, comme précédemment :

$$B_t S_t \quad = \quad B_0 S_0.$$

5.2 Existence et caractérisation du régime régulier optimal

Pour déterminer le régime régulier optimal, partons de la condition (4.2) de maximisation du lagrangien par rapport à n_t après y avoir posé $\beta_t = 0$ et y avoir substitué, à B_t, sa valeur en régime régulier donnée par (5.1) et, à λ_t, sa valeur le long d'un sentier optimal donnée par (4.3) :

$$A^{1-{}^{2}}[1-n]^{-{}^{2}} \quad = \quad cte = \nu_t b B_0 e^{bnt} + \lambda_0 A B_0^{-1} e^{(½-bn)t}. \tag{5.7}$$

La solution de l'équation (5.7) est la suivante :

$$n = \rho/b,\ B_t = B_0 e^{\tfrac{1}{2}t} \quad \text{et} \quad \nu_t = \nu_0 e^{-\tfrac{1}{2}t}. \tag{5.8}$$

Il s'avère aussi que ces fonctions vérifient l'équation (4.4) déterminant la valeur de $\dot{\nu}_t$ le long de la trajectoire optimale pourvu que :

$$\nu_0 \quad = \quad \lambda_0 A[b-\rho]/\rho b B_0^2. \tag{5.9}$$

Si donc $\rho < b$, de sorte que $n < 1$ et $\nu_0 > 0$, alors $n = \rho/b$ est l'effort de recherche optimal et la consommation en régime stationnaire optimal s'élève à $c = A[b-\rho]/b$.

En reportant la valeur $n = \rho/b$ dans (5.5) on obtient l'hyperbole que parcourent les variables d'état dans le régime régulier optimal :

$$B_t S_t \quad = \quad A[b-\rho]/\rho b. \tag{5.10}$$

On a vu à la section précédente (cf. (4.9)) qu'on doit avoir le long d'un sentier optimal, $\lambda_t S_t = \nu_t B_t$ et donc, en particulier, en $t = 0$:

$$\lambda_0 S_0 \quad = \quad \nu_0 B_0. \tag{5.11}$$

Par ailleurs en substituant ρ/b à n dans (5.7) on obtient une autre relation entre ν_0 et λ_0 :

$$A^{1-{}^2}[(b-\rho)/b]^{2} \quad = \quad \nu_0 b B_0 + \lambda_0 A B_0^{-1}. \tag{5.12}$$

Les relations (5.10) à (5.12) permettent de déterminer ν_0 et λ_0 en fonction de S_0 [7] :

$$\nu_0 = \left[A\left(\frac{b-\rho}{b}\right)\right]^{-{}^2} \frac{\rho}{b} S_0 \quad , \text{ et} \quad \lambda_0 = \left[A\left(\frac{b-\rho}{b}\right)\right]^{1-{}^2} \frac{1}{b S_0}. \tag{5.13}$$

En conclusion, la seule condition d'existence d'un régime stationnaire optimal est la condition $b > \rho$, l'efficacité de l'activité de recherche doit être supérieure au taux d'escompte social.Dans le régime stationnaire optimal :

[i)] la répartition du travail entre les deux secteurs d'activité est indépendante de la productivité du travail A dans le secteur de production du bien de consommation de sorte que la consommation est une fonction croissante de cette productivité. Le lien des couples (n, BS) de régime stationnaire optimal lorsque A varie est donc l'horizontale d'ordonnée ρ/b.

---

[7] On vérifie aisément, en tenant compte de (5.10) pour $t = 0$, que le rapport ν_0/λ_0 qu'implique (5.13) est bien le même que celui donné en (5.9).

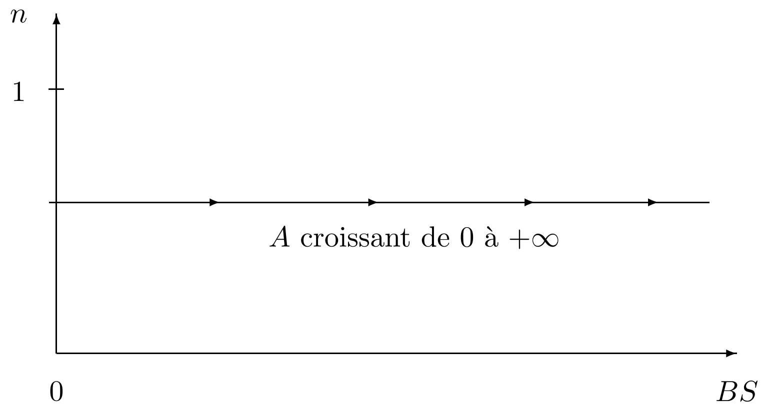

Figure 2 : Lieu des couples(n, BS) de régime stationnaire optimal lorsque A varie de 0 à $+\infty$

[ii)] l'emploi dans le secteur de recherche est d'autant plus faible que la productivité du travail b dans ce secteur est élevée de sorte que la consommation est une fonction croissante de cette productivité. Puisque $dn/db = -\rho/b^2$ et $dBS/db = A/b^2$, le lieu des couples (n, BS) lorsque b varie de ρ à $+\infty$ est la droite de pente $dn/dBS = -\rho/A$.

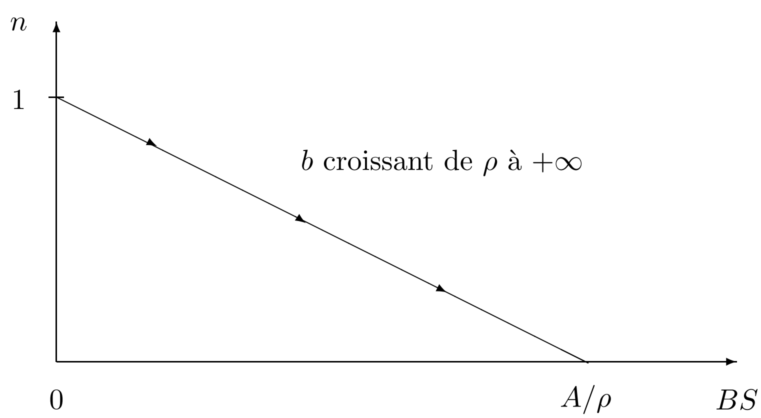

Figure 3 : Lieu des couples (n, BS) de régime stationnaire optimal lorsque b varie de ρ à $+\infty$

[iii)] l'emploi dans le secteur de la recherche est d'autant plus élevé que le taux d'actualisation social est élevé et donc la consommation est une fonction décroissante de ce taux. Puisque $dn/d\rho = 1/b$ et $dBS/d\rho = -A/\rho^2$, le lieu des couples (n, BS) lorsque ρ varie de b à 0 est une courbe convexe de pente $dn/dBS = -\rho^2/bA$.

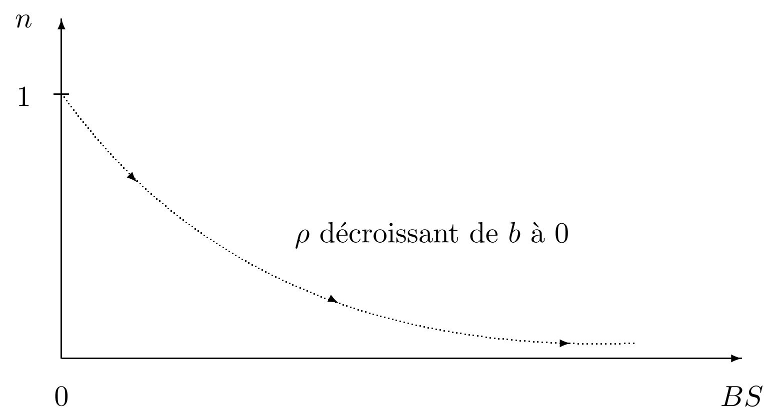

Figure 4 : Lieu des couples (n, BS) de régime stationnaire optimal lorsque ρ varie de b à 0

On notera que, ni l'intensité de l'effort de recherche, ni la consommation ne dépendent en régime de l'élasticité de l'utilité marginale ϵ. La raison en est qu'en régime stationnaire, puisque $\dot{c}_t = 0$, dans le membre gauche de la condition (4.11) d'égalisation du taux marginal de substitution intertemporelle aux taux marginal de transformation intertemporelle, le terme en ϵ disparaît [8]. En dehors des régimes réguliers, $\dot{c}_t \neq 0$ et le terme en ϵ n'est pas nul. La vitesse de convergence vers le régime stationnaire dépend donc de l'élasticité ϵ comme on va le montrer maintenant.

6 La dynamique de la transition optimale vers le régime régulier

Supposons remplie la condition d'existence d'un régime régulier optimal, $b > \rho$, et montrons comment partant de conditions initiales quelconques, la trajectoire optimale de l'effort de recherche n_t tend asymptotiquement vers son niveau de régime régulier optimal.

L'étude des régimes réguliers a permis de mettre en évidence que le long des sentiers réguliers le produit $B_t S_t$ est constant. Ceci suggère de construire le diagramme de phase en prenant comme variable d'état la variable $R_t = B_t S_t$, qui est un indicateur d'abondance de la ressource à l'instant t. La quantité de ressource S_t peut en effet difficilement être qualifiée d'abondante ou rare puisque les disponibilités doivent être appréciées au regard des capacités de la société à les transformer en bien de consommation. B_t est l'indicateur de cette capacité à l'instant t. Le produit $B_t S_t = R_t$

[8] Il n'en serait pas de même dans un modèle où la productivité du travail A pourrait être améliorée elle aussi, car le régime régulier serait un sentier le long duquel la consommation augmente à taux constant.

est l'indicateur pertinent de la rareté effective de la ressource à l'instant t. C'est très précisément le potentiel de consommation, présente et à venir, de la société, lorsqu'à partir de l'instant t, B_t reste constant. On montre en appendice (cf. annexe A.3) que l'ensemble des sentiers de consommation réalisables partant d'un potentiel de consommation R_0 donné ne dépend pas de la décomposition de R_0, i.e. quels que soient B'_0 et S'_0 tels que $B'_0 S'_0 = R_0$ l'ensemble des sentiers de consommation réalisables reste le même.

En régime régulier, en particulier en régime régulier optimal, le potentiel de consommation est maintenu constant. Si donc initialement ce potentiel est supérieur à son niveau de régime stationnaire optimal, on s'attend à ce qu'il faille le laisser décroître en choisissant un effort de recherche plus faible que celui du régime régulier optimal et, conséquemment, un niveau de consommation plus élevé ; si, initialement, le potentiel est inférieur au potentiel du régime régulier, on s'attend au contraire à ce qu'il faille le faire croître en consentant un effort de recherche supérieur à celui du régime régulier optimal, c'est-à-dire un niveau de consommation plus faible.

L'autre variable que nous retiendrons pour construire le diagramme de phase est la consommation.

La première relation permettant de construire le diagramme de phase est la relation (4.11) qu'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\dot{c}_t = \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{bA}{A+bR_t} - \rho\right] c_t, \tag{6.1}$$

de sorte que :

$$\dot{c}_t <, =, > 0 \quad \text{selon que} \quad R_t >, =, < A[b-\rho]/\rho b. \tag{6.2}$$

La consommation doit croître si R_t est inférieur à son niveau de régime régulier et décroître dans le cas contraire.

Pour construire la seconde relation, déterminant le sens du mouvement de R_t, différencions R_t par rapport au temps :

$$\dot{R}_t = \dot{B}_t S_t + B_t \dot{S}_t = b n_t R_t - B_t s_t. \tag{6.3}$$

Puisque $c_t = A[1-n_t] = B_t s_t$, on peut réécrire (6.3) sous la forme :

$$\dot{R}_t = b n_t R_t - c_t,$$

et puisque $n_t = [A - c_t]/A$, on obtient finalement la seconde relation cherchée :

$$\dot{R}_t = b[A - c_t] R_t A^{-1} - c_t. \tag{6.4}$$

On a donc :

$$\dot{R}_t >, =, < 0 \quad \text{selon que} \quad c_t <, =, > bAR_t/(A+bR_t). \tag{6.5}$$

La courbe $\dot{R}_t = 0$ est la branche croissante de l'hyperbole $\tilde{c}(R) = bAR/(A + bR)$ passant par 0 et asymptote à $c = A$ lorsque R tend vers l'infini.

On vérifie aisément que pour $R = A[b - \rho]/\rho b$, alors $c = A[b - \rho]/b$ sur la courbe $\dot{R}_t = 0$. En d'autres termes le point d'intersection de l'hyperbole $\tilde{c}(R)$ et de la verticale $\dot{c}_t = 0$, est bien le point qui figure le régime régulier optimal. On montre en appendice (cf. annexe A.3) que ce point est un point-selle si la condition d'existence d'un régime régulier, $b > \rho$, est remplie.

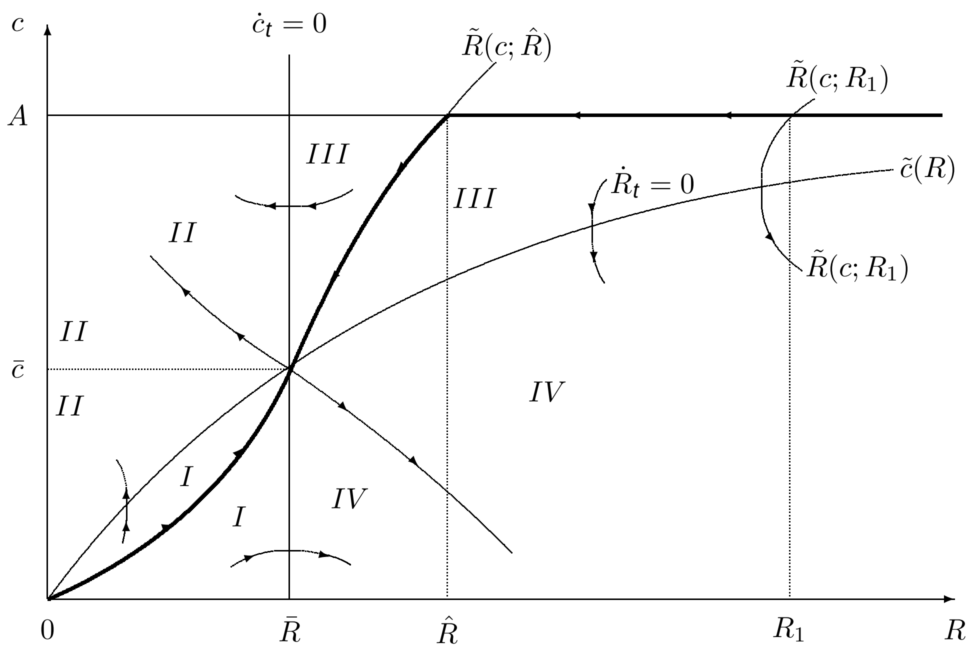

Figure 5 : Diagramme de phase, cas $b > \rho$

NB : Région I : $\dot{R}_t > 0$ et $\dot{c}_t > 0$; Région II : $\dot{R}_t < 0$ et $\dot{c}_t < 0$;
Région III : $\dot{R}_t < 0$ et $\dot{c}_t < 0$; Région IV : $\dot{R}_t > 0$ et $\dot{c}_t < 0$.
$\bar{c} = A[b - \rho]/b$ et $\bar{R} = A[b - \rho]/\rho b$.

Pour compléter la construction du diagramme de phase, il reste à déterminer la forme de la branche stable pour R suffisamment élevé, le problème étant de savoir s'il existe un niveau de la variable d'état au-delà duquel le régime optimal est un régime bloqué dans lequel $c_t = A$, i.e. $n_t = 0$, ou si, aussi grand que soit R, il convient d'affecter une partie du travail disponible, aussi minime soit-elle, à la recherche-développement. Pour ce faire convenons de noter $\tilde{R}(c; R)$ la fonction correspondant à la trajectoire, définie par les équations (6.1) et (6.4), dont la courbe dans l'espace (c, R) passe par le point $(c = A, R > A[b - \rho]/\rho b)$ (zone III sur la Figure 2). Alors en $c = A$

et R :

$$\frac{d\tilde{R}}{dc} = -\epsilon\left[\frac{bA}{A+bR}-\rho\right]^{-1}, \tag{6.6}$$

et donc :

$$\lim_{R\uparrow\infty} d\tilde{R}/dc = \epsilon/\rho. \tag{6.7}$$

Par ailleurs la courbe $\tilde{c}(R) = bAR/(A+bR)$ le long de laquelle les trajectoires vérifiant les conditions de premier ordre sont telles que $\dot{R}_t = 0$, tend vers A lorsque R tend vers ∞. Il résulte alors de (6.7), que, si R croit suffisamment, la courbe $\tilde{R}(c;R)$ coupe la courbe $\tilde{c}(R)$ [9]. C'est le cas de la courbe $\tilde{R}(c;R_1)$ illustrée à la Figure 2. La courbe vérifiant les conditions de premier ordre du problème (P), qui pointe vers $(\bar{c} = A[b-\rho]/b,\ \bar{R} = A[b-\rho]/\rho b)$, le régime régulier, est donc une courbe $\tilde{R}(c;\hat{R})$ qui part de l'horizontale $c = A$ en un point $\hat{R} \in]A[b-\rho]/\rho b, \infty[$. Pout tout $R > \hat{R}$, le sentier optimal consiste alors à affecter la totalité de la population active à la seule production du bien de consommation. En d'autres termes si le potentiel de consommation initial R_0 est suffisamment grand, il existe une phase initiale de la trajectoire optimale pendant laquelle $c_t = A$, $B_t = B_0$ et $\dot{S}_t = -A/B_0$, i.e. pendant laquelle le potentiel R_t décroît à sa vitesse maximale $\dot{R}_t = -A$, à un taux $\dot{R}_t/R_t = -1/[(R_0/A) - t]$ qui, en valeur absolue, décroît, et ce, jusqu'à ce que le potentiel soit ramené à la valeur $\hat{R}$. Alors la consommation commence à décroître, l'effort de recherche commence à croître, tandis que R_t continue de décroître, toutes ces variables tendant asymptotiquement vers leurs valeurs de régime régulier.

Il reste à déterminer maintenant la politique optimale lorsqu'il n'existe pas de régime régulier optimal.

7 La dynamique optimale en l'absence d'opportunités techniques fortes au regard de l'impatience

Supposons que la productivité de l'effort de recherche soit si faible au regard du taux d'escompte social qu'il n'existe pas de régime régulier optimal,

[9] On remarquera qu'en $c = A$ et R, on a aussi :

$$\frac{d^2\tilde{R}}{dc^2} = \frac{-\epsilon[bA-\rho(A+bR)]}{\left[\frac{bA}{A+bR}-\rho\right]^2} + \epsilon\left[\frac{bA^2}{(A+bR)^2}\right],$$

et donc :

$$\lim_{R\uparrow\infty}\frac{d^2\tilde{R}}{dc^2} = +\infty,$$

condition suffisante pour que la fonction $\tilde{R}(c;R)$ atteigne un minimum lorsqu'elle coupe la courbe $\tilde{c}(R)$ quand R est suffisamment grand.

$\rho > b$. Aussi faible que soit cette productivité cependant, pourvu qu'elle ne soit pas rigoureusement nulle, mieux vaut affecter le potentiel de travail qui ne sert pas à produire le bien de consommation, à l'amélioration de B_t plutôt que le laisser oisif. C'est là que réside la différence essentielle avec l'analyse développée à la section 3 où on supposait que la productivité de la recherche était nulle. Le travail qui ne servait pas à produire le bien de consommation ne pouvait alors rester qu'inemployé. Dans le cas présent au contraire la totalité du travail disponible est utilisée, mais la conséquence d'une productivité de la recherche trop faible par rapport à la préférence pour le présent est qu'à l'optimum, l'effort de recherche consenti ne permet pas de prévenir la chute du potentiel de consommation R_t qui tend asymptotiquement vers 0, ainsi que le flux de consommation instantanée c_t. Il s'agit d'un choix délibéré de la société [10] qui, compte tenu des possibilités d'amélioration des techniques qui s'offrent à elle, a une telle préférence pour le présent qu'elle choisit à chaque instant une structure de mobilisation de la force de travail dont elle dispose ne permettant pas de pérenniser la consommation à un certain niveau. On a vu en effet à la sous-section 5.1, qu'aussi faible que soit la productivité b de l'effort de recherche, il existe une infinité de régimes réguliers (stationnaires).Le choix d'un potentiel de consommation constamment décroissant ne résulte donc pas d'une impossibilité stricto sensu, mais plutôt d'une insuffisance des opportunités d'amélioration de la productivité de la ressource au regard de l'impatience.

La caractérisation des trajectoires dans le diagramme de phase (c, R) est techniquement semblable à celle que nous avons déterminée à la section précédente puisqu'à chaque instant le travail disponible est pleinement utilisé. La forme générale de la courbe $\tilde{c}(R)$ le long de laquelle $\dot{R}_t = 0$ si la trajectoire est optimale, ne change pas. La raison en est que la position de cette courbe dépend de A et de b, mais pas de ρ. Pour tout couple (c, R) situé au-dessus de la courbe en question on doit avoir $\dot{R}_t < 0$ le long d'une trajectoire satisfaisant les conditions de premier ordre ; pout tout couple (c, R) situé au-dessous, on doit avoir $\dot{R}_t > 0$. Par ailleurs l'évolution de la consommation, $\dot{c}_t$, est toujours déterminée par la relation (6.1) et puisque maintenant $A[b - \rho]/\rho b < 0, \dot{c}_t < 0$ pour tout $R_t > 0$. Le diagramme de phase correspondant aux valeurs de ρ et b pour lesquelles $\rho > b$, est illustré à la Figure 6 ci-dessous.

[10] Pour autant que le devenir de la société soit celui qui maximise la valeur de la fonction d'objectif du "planificateur bienveillant".

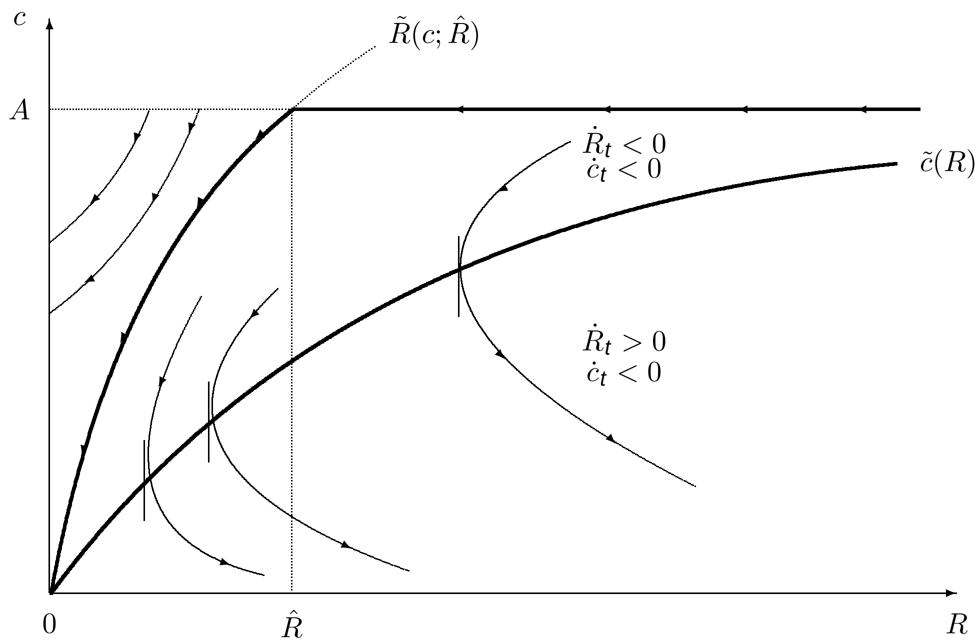

Figure 6 : Diagramme de phase,cas $b < \rho$

La trajectoire optimale pour R suffisamment faible est donnée par une courbe $\tilde{R}(c;\hat{R})$ tangente à l'axe des ordonnées en $(c = 0, R = 0)$, qui coupe l'horizontale d'ordonnée $c = A$ en $R = \hat{R}$. Pour $R > \hat{R}$ la politique optimale consiste à affecter la totalité du travail disponible à la seule production du bien de consommation ; pour $R < \hat{R}$ une partie du travail est affectée à la production du bien de consommation tandis que l'autre partie est affectée à la recherche. Plus R est faible plus la fraction du travail disponible affectée à la recherche est importante et asymptotiquement la totalité du travail disponible devrait être affectée à la recherche. Cependant la consommation reste toujours suffisamment forte, bien que tendant vers 0, pour qu'en permanence la baisse de S_t ne soit pas compensée par la croissance de B_t. Asymptotiquement :

$$\lim_{t\uparrow\infty} B_t = +\infty, \ \lim_{t\uparrow\infty} S_t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\uparrow\infty} B_t S_t = 0.$$

Il est intéressant de souligner que passer d'un taux d'actualisation social relativement faible, $\rho < b$, à un taux relativement important, $\rho > b$, a pour effet, si l'économie évolue optimalement, de réduire l'effort de recherche initial et d'augmenter l'effort de recherche final. Le sentier d'effort de recherche optimal bascule autour d'une certaine date T. Les sentiers d'efforts de recherche des deux sociétés sont illustrés à la Figure 7 ci-dessous. On suppose que R_0 est suffisamment élevé pour qu'au départ aucune des deux sociétés ne doive consentir aucun effort. L'effort optimal de la société pour laquelle $\rho > b$ est tracé en trait gras, celui de la société pour laquelle $\rho < b$ en trait léger. Le passage d'un taux d'actualisation social modéré à un taux élevé, a pour effet de réduire l'effort de recherche optimal sur l'intervalle de temps $]T', T[$ et de l'accroître ensuite sur l'intervalle de temps $]T, +\infty[$, l'écart augmentant au fur et à mesure que l'on progresse dans le futur et tendant vers $1 - \rho/b$.

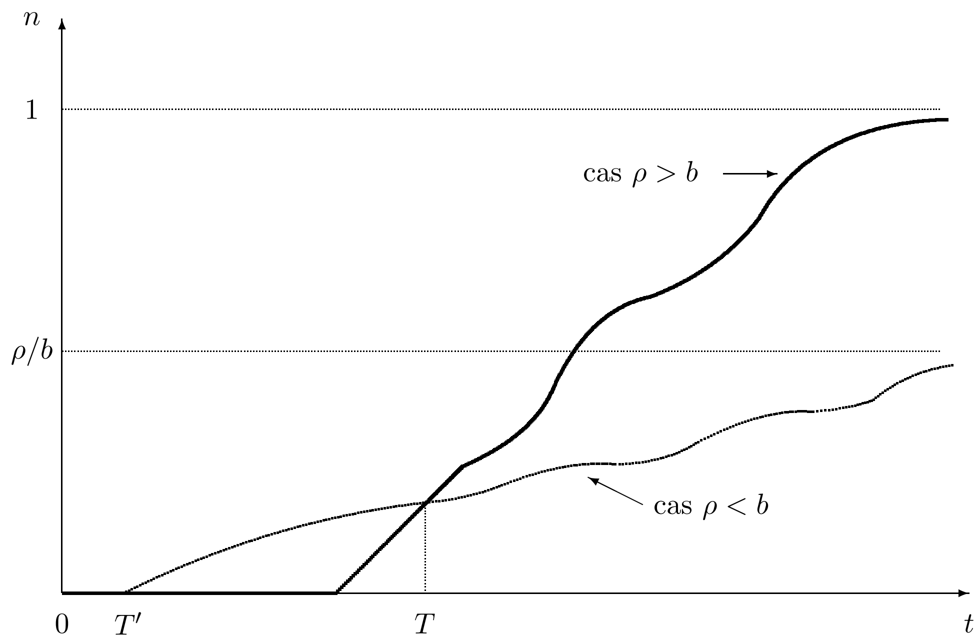

Figure 7 : Profils types des trajectoires optimales d'efforts de recherche selon que $\rho > b$ ou $b < \rho$

8 Conclusion

Nous avons déterminé quelle devrait être la trajectoire de l'effort de recherche d'une société dont le bien-être dépend de la possibilité d'utiliser une ressource non-renouvelable essentielle, en fonction des valeurs possibles des paramètres d'un modèle volontairement épuré : taux de dépréciation du futur, élasticité de l'utilité marginale de la consommation, productivité du travail dans le secteur de production du bien de consommation et dans le secteur de la recherche, et productivité de la ressource. Quel que soit le type de la trajectoire optimale, i.e. quel que soit le jeu de valeurs des paramètres qui caractérise cette société stylisée, il convient de s'interroger sur le dispositif institutionnel qui minimise la perte de bien-être par rapport à cet optimum de premier rang. On sait qu'aux formes réduites du genre de celles que nous avons retenue, peuvent correspondre plusieurs modèles d'économie décentralisée, les principaux étant ceux proposés par Lucas (1988), Romer

(1990), Grossman et Helpman (1991) et Aghion et Howitt (1992). Sans vouloir préjuger des conclusions d'études qui pour l'essentiel restent à faire [11] on doit s'attendre cependant à ce que ces fonctionnements décentralisés, caractérisés par la présence soit d'externalités fortes, soit d'imperfections de marché conséquentes, ne conduisent pas à l'optimum, tout au moins pendant la phase de convergence vers le régime régulier.

Appendices

A.1 La valeur du stock des connaissances est égale à la valeur du stock de ressource le long de toute trajectoire optimale

Définissons z_t comme la différence entre $\lambda_t S_t$ et $\nu_t B_t$:

$$z_t \quad = \quad \lambda_t S_t - \nu_t B_t,$$

et différencions z_t par rapport à t :

$$\dot{z}_t \quad = \quad \dot{\lambda}_t S_t + \lambda_t \dot{S}_t - \dot{\nu}_t B_t - \nu_t \dot{B}_t.$$

Dans cette relation, substituons à $\dot{\lambda}_t$ son expression $\rho\lambda_t$, à $\dot{S}_t$ son expression $-s_t = -A[1-n_t]/B_t$, à $\dot{\nu}_t$ son expression donnée par (4.4), et à $\dot{B}_t$, son expression $\dot{B}_t = bn_t B_t$. Après simplification, on obtient :

$$\dot{z}_t \quad = \quad \rho[\lambda_t S_t - \nu_t B_t] = \rho z_t,$$

de sorte que :

$$z_t \quad = \quad z_0 e^{\frac{1}{2}t}.$$

Par ailleurs, pour le type de problème considéré, le long de tout sentier optimal, les conditions de transversalité sont :

$$\lim_{t\uparrow\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\lambda_t S_t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\uparrow\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\nu_t B_t = 0,$$

d'où :

$$\lim_{t\uparrow\infty} e^{-\frac{1}{2}t} z_t = 0 \;\Rightarrow\; z_0 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_t S_t = \nu_t B_t, \qquad t \geq 0.$$

[11] On trouvera dans Grimaud (2000) une étude des interventions nécessaires pour restaurer l'optimum de premier rang dans une économie "à la Romer" avec ressources non-renouvelables.

A.2 Interprétation de la condition (4.11)

La condition (4.11) :

$$\rho - \frac{u''_t}{u'_t}\dot{c}_t \quad = \quad \frac{b}{1 + bA^{-1}B_tS_t} \quad ,$$

est une condition d'égalité du taux marginal instantané de substitution intertemporelle au taux marginal instantané de transformation intertemporelle.

Partons d'une trajectoire d'évolution de l'économie le long de laquelle est utilisée la totalité des facteurs de production, travail, ressource non-renouvelable et connaissances techniques, c'est-à-dire une trajectoire située sur la frontière d'efficience intertemporelle de l'économie et notons z^*_t la valeur à l'instant t d'une variable z le long de cette trajectoire. Considérons deux intervalles de temps $I_1 = [t, t + dt[$ et $I_2 = [t + h, t + h + dt[$, $h > dt$, et à chaque instant sur ces intervalles des variations dc_1 et dc_2 de la consommation, la trajectoire de consommation restant inchangée en dehors des intervalles en question. On notera $\tilde{z}_t$ la valeur à l'instant t d'une variable z le long du sentier perturbé. Les variations dc_1 et dc_2 imposent d'abord des variations directes de l'utilisation de la ressource sur I_1 et I_2. Elles imposent aussi des variations directes de l'effort de recherche sur ces mêmes intervalles puisque tout le travail disponible est utilisé, variations qui modifient la trajectoire d'évolution du stock de connaissances et donc indirectement l'utilisation de la ressource sur l'intervalle $[t + dt, \infty[$. Puisqu'initialement la totalité du stock de ressource était utilisée, la somme des variations instantanées de l'utilisation de la ressource doit être nulle si la trajectoire perturbée doit être une trajectoire de la surface d'efficience.

(i) Sur l'intervalle I_1, la variation de l'utilisation de la ressource est égale à :

$$\Delta^1 S \quad = \quad ds_1 dt \;\simeq\; dc_1 dt/B^*_t. \tag{A.2.1}$$

La variation de l'effort de recherche à chaque instant s'élève à $dn_1 = -dc_1/A$ et donc, sur la totalité de l'intervalle, à :

$$dn_1 dt \quad = \quad -dc_1 dt/A,$$

de sorte que :

$$\tilde{B}_{¿} = B^*_{¿} e^{-bdc_1dt=A}, \qquad \tau \in [t + dt, t + h[. \tag{A.2.2}$$

(ii) Sur l'intervalle $[t + dt, t + h[$ la trajectoire de la consommation ne change pas, $c_t = c^*_{¿}$, et donc le nouveau sentier d'utilisation de la ressource est défini par :

$$\tilde{s}_{¿} = c^*_t/\tilde{B}_{¿} = s^*_{¿} e^{bdc_1dt=A}, \qquad \tau \in [t + dt, t + h[$$

ce qui induit une modification de l'usage de la ressource d'un montant $\Delta_1 S$ égal à :

$$\Delta_1 S = \int_{t+dt}^{t+h} [\tilde{s}_{¿} - s^*_{¿}] d\tau = \left[e^{bdc_1dt=A} - 1 \right] \left[S^*_{t+dt} - S^*_{t+h} \right]. \qquad \text{(A.2.3)}$$

(iii) Sur l'intervalle I_2, la variation d'utilisation de la ressource est égale à :

$$\Delta^2 S = ds_2 dt \simeq \frac{1}{\tilde{B}_{t+h}} dc_2 dt = \frac{1}{B^*_{t+h}} e^{bdc_1dt=A} dc_2 dt, \qquad \text{(A.2.4)}$$

et la variation de l'effort de recherche à :

$$dn_2 dt \quad = \quad -dc_2 dt/A,$$

de sorte que :

$$\tilde{B}_{¿} = B^*_{¿} e^{-b[dc_1+dc_2]dt=A}, \quad \tau \in [t+h+dt, \infty[. \qquad \text{(A.2.5)}$$

(iv) Enfin sur l'intervalle $[t+h+dt, \infty[$, puisque le sentier de consommation ne change pas, le sentier perturbé d'utilisation de la ressource est défini par :

$$\tilde{s}_{¿} = s^*_{¿} e^{b[dc_1+dc_2]dt=A}, \qquad \tau \in [t+h+dt, \infty[$$

ce qui induit une modification de l'usage de la ressource $\Delta_2 S$, égale à :

$$\Delta_2 S = \int_{t+h+dt}^{\infty} [\tilde{s}_{¿} - s^*_{¿}] d\tau = [e^{b[dc_1+dc_2]dt=A} - 1] S^*_{t+h+dt}. \qquad \text{(A.2.6)}$$

(v) Puisque $\int_0^\infty s^*_{¿} d\tau = S_0$, on doit avoir :

$$\Delta^1 S + \Delta_1 S + \Delta^2 S + \Delta_2 S \quad = \quad 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{B^*_t} dc_1 dt + [e^{bdc_1dt=A} - 1] \left[S^*_{t+dt} - S^*_{t+h} \right]$$
$$+ \frac{1}{B^*_{t+h}} e^{bdc_1dt=A} dc_2 dt \quad + \quad [e^{b[dc_1+dc_2]dt=A} - 1] S^*_{t+h+dt} = 0 \qquad \text{(A.2.7)}$$

Pour dt suffisamment petit, $e^{xdt} - 1 \simeq xdt$. (A.2.7) peut donc encore s'écrire, en regroupant les termes en dc_1 et dc_2 :

$$\left\{ \frac{1}{B^*_t} + \frac{b}{A} \left[S^*_{t+dt} - S^*_{t+h} + S^*_{t+h+dt} \right] \right\} dc_1 dt$$
$$+ \left\{ \frac{1}{B^*_{t+h}} e^{bdc_1dt=A} + \frac{b}{A} S^*_{t+h+dt} \right\} dc_2 dt \quad = \quad 0$$

Si dt est suffisamment petit, $S^*_{t+dt} \simeq S^*_t$ et $S^*_{t+h+dt} \simeq S^*_{t+h}$ et si, de plus, dc_1 est suffisamment petit alors $e^{bdc_1 dt=A} \simeq 1$, d'où finalement :

$$-\frac{dc_2}{dc_1} \simeq \frac{B^*_{t+h}}{B^*_t}\left[\frac{A+bB^*_tS^*_t}{A+bB^*_{t+h}S^*_{t+h}}\right] \tag{A.2.8}$$

Le membre droit de l'expression (A.2.8) est le taux marginal de transformation intertemporelle entre t et $t+h$, c'est-à-dire approximativement la quantité de bien de consommation supplémentaire qu'on peut obtenir en $t+h$ si on diminue d'une unité la quantité disponible en t, lorsqu'on est sur la surface de transformation de l'économie, c'est-à-dire lorsqu'on utilise efficacement tous les facteurs, à savoir, à chaque instant la totalité du travail disponible et sur $[0, \infty[$ le stock initial de ressource.

Considérons maintenant la variation ΔU de la valeur de la fonction d'objectif du programme (P) qu'induisent les variations dc_1 et dc_2 :

$$\Delta U = e^{-½t}u'^*_t dc_1 dt + e^{-½(t+h)}u'^*_{t+h}dc_2 dt.$$

Si la trajectoire initiale est une trajectoire optimale, on doit avoir $\Delta U = 0$, d'où :

$$-\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{u'^*_t}{u'^*_{t+h}}e^{½t}. \tag{A.2.9}$$

Pour h suffisamment petit, on a :

$$\begin{aligned}\frac{u'^*_t}{u'^*_{t+h}}e^{½h} &= 1+\frac{u'^*_t}{u'^*_{t+h}}e^{½h}-1 \simeq 1+ln\left(\frac{u'^*_t}{u'^*_{t+h}}e^{½h}\right)\\ &= 1+lne^{½h}-ln\left(\frac{u'^*_{t+h}}{u'^*_t}\right) \simeq 1+\rho h-\left(\frac{u'^*_{t+h}}{u'^*_t}-1\right)\\ &\simeq 1+\rho h-\frac{u''^*_t}{u'^*_t}\dot{c}^*_t h = 1+\left[\rho-\frac{u''^*_t}{u'^*_t}\dot{c}^*_t\right]h. \end{aligned} \tag{A.2.10}$$

Le membre droit de (A.2.10) est le taux marginal de substitution intertemporelle entre t et $t+h$.

On déduit de (A.2.8) à (A.2.10) que, le long d'un trajectoire optimale, on doit avoir :

$$\left[\rho-\frac{u''^*_t}{u'^*_t}\dot{c}^*_t\right]h = \frac{B^*_{t+h}}{B^*_t}\left[\frac{A+bB^*_tS^*_t}{A+bB^*_{t+h}S^*_{t+h}}\right]-1. \tag{A.2.11}$$

Montrons que lorsque $h \to 0$ cette relation n'est autre que la relation (4.11).

Le membre droit de (A.2.11) est égal à :

$$\frac{A\left[\frac{B^*_{t+h}}{B^*_t}-1\right]+bB^*_{t+h}\left[S^*_t-S^*_{t+h}\right]}{A+bB^*_{t+h}S^*_{t+h}}. \tag{A.2.12}$$

Pour h suffisamment petit, on a :

$$\begin{aligned} B^*_{t+h} &\simeq B^*_t+\dot{B}^*_t h = B^*_t + bn^*_t B^*_t h \simeq (1+bn^*_t h)B^*_t \\ S^*_{t+h} &\simeq S^*_t+\dot{S}^*_t h = S^*_t - s^*_t h = S^*_t - A[1-n^*_t]h/B^*_t\ , \end{aligned}$$

de sorte que le numérateur de (A.2.12) s'écrit encore :

$$hbA[1+b(1-n^*_t)n^*_t h]$$

et (A.2.11) devient :

$$\rho-\frac{u''^*_t}{u'^*_t}\dot{c}^*_t \quad = \quad \frac{b}{1+bA^{-1}B^*_t S^*_t}\ ,$$

c'est-à-dire la relation (4.11).

A.3 Ensemble des sentiers de consommation réalisables et potentiel de consommation

Un sentier de consommation $C=\{c_t,t\geq 0\}$ est réalisable partant de (B_0,S_0) s'il existe des sentiers $L=\{l_t,t\geq 0\}, N=\{n_t,t\geq 0\}$ et $\Sigma=\{s_t,t\geq 0\}$ tels que :

$$c_t = Al_t, \tag{A.3.1}$$

$$B_t = B_0 V_t, \tag{A.3.2}$$

$$s_t = c_t/B_t, \tag{A.3.3}$$

$$S_t = S_0 - \int_0^t s_x dx \geq 0, \tag{A.3.4}$$

$$1-l_t-n_t\geq 0, l_t\geq 0, n_t\geq 0. \tag{A.3.5}$$

où $V_t = e^{b\int_0^t n_x dx}$.

On notera $\mathcal{R}(C,B_0,S_0)$ le sentier des potentiels de consommation induit par C partant de (B_0,S_0) via L,N et Σ :

$$\mathcal{R}(C,B_0,S_0)=\{R_t,t\geq 0\}, \qquad R_t = B_t S_t \qquad t\geq 0 \tag{A.3.6}$$

où B_t et S_t sont donnés par (A.3.2) et (A.3.4) respectivement.

Proposition *Soit C un sentier de consommation réalisable partant de (B_0, S_0) via L, N et Σ. Alors pour tout $B'_0 S'_0 \ : B'_0 S'_0 = B_0 S_0$, il existe Σ' tel que C est réalisable partant de (B'_0, S'_0) via L, N et Σ', et, $\mathcal{R}(C, B_0, S_0) = \mathcal{R}(C, B'_0, S'_0)$.*

Supposons qu'on puisse obtenir C partant de (B_0, S_0) via L, N et Σ. On a donc :

$$\begin{aligned} B_t &= B_0 V_t \\ S_t &= S_0 - \int_0^t s_¿ d_¿ dx = S_0 - \int_0^t \frac{c_¿}{B_¿} d\tau = S_0 - \frac{1}{B_0} \int_0^t \frac{c_¿}{V_¿} d\tau \end{aligned}$$

d'où, en posant $W_t = \int_0^t \frac{c_¿}{V_¿} d\tau$:

$$B_t S_t = B_0 S_0 V_t - W_t V_t, \qquad t \geq 0. \tag{A.3.7}$$

Partons maintenant de (B'_0, S'_0) tel que $B'_0 S'_0 = B_0 S_0$ et considérons la trajectoire N, de sorte que :

$$B'_t = B'_0 V_t.$$

Posons $s'_t = c_t / B'_t, t \geq 0$ et soit :

$$S'_t = S'_0 - \int_0^t s'_¿ d\tau = S'_0 - \int_0^t \frac{c_¿}{B'_¿} d\tau = S'_0 - \frac{1}{B'_0} \int_0^t \frac{c_¿}{V_¿} d\tau.$$

On a donc :

$$B'_t S'_t = B'_0 S'_0 V_t - W_t V_t, \qquad t \geq 0 \tag{A.3.8}$$

Puisque $B'_0 S'_0 = B_0 S_0$, (A.3.7) et (A.3.8) impliquent que :

$$B_t S_t = B'_t S'_t, \qquad t \geq 0 \tag{A.3.9}$$

et puisque $B_t S_t \geq 0$ et $B'_t > 0$, alors :

$$S'_t \geq 0, \qquad t \geq 0. \tag{A.3.10}$$

A.4 Le couple $(\bar{c}, \bar{R})$ de régime stationnaire optimal est un point-selle

Le couple d'équations différentielles dont $\bar{c} = A[b-\rho]/b$ et $\bar{R} = A[b-\rho]/\rho b$ est un point stationnaire est le système :

$$\begin{aligned} \dot{c}_t &= \phi(c_t, R_t) = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{bA}{A + bR_t} - \rho \right] c_t \\ \dot{R}_t &= \psi(c_t, R_t) = \frac{b[A - c_t]}{A} R_t - c_t. \end{aligned}$$

Les dérivées des fonctions ϕ et ψ ont pour expression :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial c_t} &= \frac{1}{\epsilon}\left[\frac{bA}{A+bR_t} - \rho\right] &, \frac{\partial \phi}{\partial R_t} = -\frac{1}{\epsilon}\frac{b^2 A c_t}{(A+bR_t)^2} \\
\frac{\partial \psi}{\partial c_t} &= -\frac{bR_t}{A} - 1 &, \frac{\partial \psi}{\partial R_t} = \frac{b[A-c_t]}{A},
\end{aligned}$$

et ont pour valeur au point stationnaire :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial c_t} &= 0 &, \frac{\partial \phi}{\partial R_t} = -\frac{\rho^2[b-\rho]}{\epsilon b} \\
\frac{\partial \psi}{\partial c_t} &= -\frac{b}{\rho} &, \frac{\partial \psi}{\partial R_t} = \rho.
\end{aligned}$$

Le jacobien du système au point stationnaire est égal à :

$$J = \rho[b-\rho]/\epsilon.$$

Le jacobien est donc positif si la condition $b > \rho$ d'existence d'un régime stationnaire optimal est remplie.

L'équation caractéristique du système est :

$$P(x) = x^2 - \rho x - \rho[b-\rho]/\epsilon = 0$$

dont les racines sont réelles si $b > \rho$:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left\{\rho - \left[\rho^2 + \frac{4\rho(b-\rho)}{\epsilon}\right]^{1=2}\right\} < 0,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left\{\rho + \left[\rho^2 + \frac{4\rho(b-\rho)}{\epsilon}\right]^{1=2}\right\} > 0.$$

Puisque les racines sont réelles et de signes contraires, le point stationnaire est un point-selle.

References

Aghion, P. et P. Howitt (1992), "A Model of Growth through Creative Destruction", *Econometrica*, **60**, 323–351.

Grimaud, A. (2000), "Ressources naturelles et croissance endogène dans un modèle à biens horizontalement différenciés", *Economie et Prévision*, n° 143-144 (Avril-Juin 2000/2-3), 213–226.

Grossman, G. et E. Helpman (1991), *Innovation and Growth in the Global Economy*, The M.I.T Press, Cambridge, Mass.

Kany, F. et L. Ragot (1998), "L'environnement : un frein à la croissance dans les modèles traditionnels", in K. Schubert et P. Zagamé (sous la direction de) *L'environnement : une nouvelle dimension de l'analyse économique*, Vuibert, Paris.

Lucas, R.E. (1998), "On the Mechanisms of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, **22**, 3–42.

Romer, P.M.(1990), "Increasing Returns and Long Run Growth", *Journal of Political Economy*, **94**, 1002–1037.

Ruttan, V.W. (2001), *Technology, Growth, and Development*, Oxford University Press, Oxford.

Schubert, K. et P. Zagamé (1998), *L'environnement : une nouvelle dimension de l'analyse économique*, Vuibert, Paris.